

Кодирование чисел

Системы счисления

Задание 16

(повышенный уровень, время – 3 мин)

Краткая теория

- Необходимо помнить принципы кодирования чисел в позиционных системах счисления.
- Чтобы перевести число, скажем, 12345_N , из системы счисления с основанием N в десятичную систему, нужно умножить значение каждой цифры на N в степени, равной ее разряду:

$$\mathbf{1\ 2\ 3\ 4\ 5}_N = \mathbf{1 \cdot N^4 + 2 \cdot N^3 + 3 \cdot N^2 + 4 \cdot N^1 + 5 \cdot N^0}$$

- Последняя цифра записи числа в системе счисления с основанием N – это остаток от деления этого числа на N
- две последние цифры – это остаток от деления на N^2 , и т.д.

Краткая теория

- Число A^N в системе счисления A записывается как единица и N нулей: $A^N = \underbrace{10\dots0}_N_A$ $2^N = \underbrace{10\dots0}_N_2$ $10^N = \underbrace{10\dots0}_N_{10}$

- Число $A^N - 1$ в системе счисления A записывается как N старших цифр: $A^N - 1 = \underbrace{(A-1)\dots(A-1)}_N_A$

- Число $A^N - A^M$ при $M < N$ в системе счисления A записывается как $N - M$ старших цифр и M нулей:

$$A^N - A^M = \underbrace{(A-1)\dots(A-1)}_{N-M} \underbrace{0\dots0}_M_A$$

- Поскольку $2^{N+1} + 2^N = 2 \cdot 2^N = 2^{N+1}$, получаем $2^N = 2^{N+1} - 2^N$, откуда следует, что $-2^N = 2^{N+1} + 2^N$

Пример задания

Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 25, запись которых в системе счисления с основанием четыре оканчивается на 11?

5, 21

Решение:

- в данном случае $N=4$, остаток от деления числа на $N^2=16$ должен быть равен $11_4 = 5_{10}$
- общий вид чисел, которые дают остаток 5 при делении на 16: **$k \cdot 16 + 5$**
где k – целое неотрицательное число (0, 1, 2, ...)
- среди всех таких чисел нужно выбрать те, что меньше или равны 25 («не превосходят 25»); их всего два: 5 (при $k=0$) и 21 (при $k=1$)

Пример задания

Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 23 оканчивается на 2.

3, 7, 21

Решение:

- нужно найти все целые числа $N > 2$, такие при которых $23 = k \cdot N + 2$
где k – целое неотрицательное число (0, 1, 2, ...)
- $21 = k \cdot N$; $N = 21/k$
- задача сводится к тому, чтобы найти все делители числа 21, которые больше 2
- в этой задаче есть только три таких делителя: $N=3$, 7 и 21

Пример задания

Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 31 оканчивается на 11.

2, 3, 5, 30

Решение:

- нужно найти все целые числа $N \geq 2$, такие при которых

$$31 = k11_N = k \cdot N^2 + 1 \cdot N^1 + 1 \cdot N^0 = k \cdot N^2 + N + 1;$$

$$30 = k \cdot N^2 + N$$

где k – целое неотрицательное число (0, 1, 2, ...)

- задача сводится к тому, чтобы найти все делители числа 30 и отобрать только те из них, для которых уравнение разрешимо при целом k , то есть $k = (30 - N)/N^2$

- выпишем все делители числа 30, большие или равные 2:
2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

- из всех этих делителей только для 2, 3, 5 и 30 значение k – целое число (оно равно соответственно 7, 3, 1 и 0)

Пример задания

Укажите, сколько всего раз встречается цифра 2 в записи чисел 10, 11, 12, ..., 17 в системе счисления с основанием 5.

7

Решение:

- запишем первое и последнее число в заданном диапазоне в системе счисления с основанием 5:

$$10 = 20_5, \quad 17 = 32_5$$

- заметим, что оба они содержат цифру 2, так что, 2 цифры мы уже нашли
- между 20_5 и 32_5 есть еще числа

$$21_5, 22_5, 23_5, 24_5, 30_5, 31_5$$

- в них 5 цифр 2 (в числе 22_5 – сразу две двойки), поэтому всего цифра 2 встречается 7 раз

Пример задания

Укажите наименьшее основание системы счисления, в которой запись числа 30 трехзначна.

4

Решение:

- Запись трёхзначного числа 30:

$$30 = x y z_N = x \cdot N^2 + y \cdot N + z$$

- Поскольку запись трехзначная, $x \neq 0$ поэтому $30 \geq N^2$
- С другой стороны, четвертой цифры нет, то есть, в третьем разряде – ноль, поэтому $N^3 > 30$
- основание N удовлетворяет двойному неравенству
$$N^3 > 30 \geq N^2$$
- учитывая, что N – целое число, методом подбора находим целые решения этого неравенства; их два – 4 и 5:
$$4^3 (64) > 30 \geq 4^2 (16)$$
$$5^3 (125) > 30 \geq 5^2 (25)$$
- минимальное из этих значений – 4

Пример задания

Запись числа 67_{10} в системе счисления с основанием N оканчивается на 1 и содержит 4 цифры. Укажите основание этой системы счисления N .

3

Решение:

- Остаток от деления числа 67 на N равен 1. При некотором целом k

$$67 = N \cdot k + 1; \quad 66 = N \cdot k$$

- Основание N – это делитель числа 66
- Запись числа содержит 4 цифры, то есть $N^3 \leq 67 < N^4$
- Выпишем кубы и четвертые степени первых натуральных чисел:

$$2^3 = 8; \quad 3^3 = 27; \quad 4^3 = 64; \quad 5^3 = 125$$

$$2^4 = 16; \quad 3^4 = 81; \quad 4^4 = 256; \quad 5^4 = 625$$

- Из этого списка условие $N^3 \leq 67 < N^4$ выполняется только для $N = 3$ и 4 (число 67 содержит четыре цифры только в системах счисления с основаниями 3 и 4)
- Но только делитель 3 дает при делении числа 66 целое k

Пример задания

Решите уравнение $121_x + 1 = 101_7$.

Ответ запишите в троичной системе счисления. Основание системы счисления указывать не нужно.

20

Решение:

- Переведём все числа в десятичную систему счисления:

$$121_x = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x^1 + 1; \quad 101_7 = 1 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 1 = 50$$

- Собирая всё в одно уравнение получаем

$$x^2 + 2x + 1 + 1 = 50 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 48 = 0$$

- Это уравнение имеет два решения, 6 и -8; основание системы счисления – натуральное число, поэтому ответ – 6
- Переводим ответ в троичную систему: $6 = 2 \cdot 3^1 = 20_3$.
- Ответ: 20

Пример задания

Сколько единиц в двоичной записи числа
 $4^{2014} + 2^{2015} - 8$

2013

Решение:

- Переведём все числа к степеням двойки:

$$4^{2014} + 2^{2015} - 8 = (2^2)^{2014} + 2^{2015} - 2^3 = 2^{4028} + 2^{2015} - 2^3$$

- Число $2^N - 1$ в двоичной системе записывается как N единиц:

$$2^N - 1 = \underbrace{1..1}_N$$

- А число $2^N - 2^K$ при $K < N$ записывается как $N - K$ единиц и K

нулей: $2^N - 2^M = \underbrace{1..1}_{N-M} \underbrace{0..0}_M$

- Отсюда число $2^{2015} - 2^3$ запишется как 2012 единиц и 3 нуля
- Прибавление 2^{4028} даст ещё одну единицу, всего получается $2012 + 1 = 2013$ единиц
- Ответ: 2013

Пример задания

Сколько единиц в двоичной записи числа

$$4^{2016} + 2^{2018} - 8^{600} + 6$$

221

Решение:

Переведём все числа к степеням двойки, разложив 6 как 2^2+2^1 :

$$4^{2016} + 2^{2018} - 8^{600} + 6 = (2^2)^{2016} + 2^{2018} - (2^3)^{600} + 2^2 + 2^1 = 2^{4032} + 2^{2018} - 2^{1800} + 2^2 + 2^1$$

- Число 2^N-1 в двоичной системе записывается как N единиц:
- А число 2^N-2^K при $K < N$ записывается как N-K единиц и K нулей:
- Отсюда число $2^{2018} - 2^{1800}$ запишется как 218 единиц и 1800 нулей
- Прибавление 2^{4032} даст ещё одну единицу, а прибавление $2^2 + 2^1$ – ещё две, всего получается $218 + 3 = 221$ единица
- Ответ: 221

Задание 1.

Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 22 оканчивается на 4.

6, 9, 18

Задание 2.

В системе счисления с некоторым основанием число 12 записывается в виде 110. Укажите это основание.

3

Задание 3.

Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 39 оканчивается на 3.

4, 6, 9, 12, 18, 36

Задание 4.

Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 29 оканчивается на 5.

6, 8, 12, 24

Задание 5.

В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 129 записывается как 1004. Укажите это основание.

5

Задание 6.

Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 40 оканчивается на 4.

6, 9, 12, 18, 36

Задание 7.

В системе счисления с некоторым основанием число десятичное 25 записывается как 100. Найдите это основание.

5

Задание 8.

Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 27 оканчивается на 3.

4, 6, 8, 12, 24

Задание 9.

Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 26, запись которых в троичной системе счисления оканчивается на 22?

8, 17, 26

Задание 10.

Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 30, запись которых в четверичной системе счисления оканчивается на 31?

13, 29

Задание 11.

Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные натуральные числа, не превосходящие 17, запись которых в троичной системе счисления оканчивается на две одинаковые цифры?

4, 8, 9, 13, 17

Задание 12.

Укажите, сколько всего раз встречается цифра 3 в записи чисел 19, 20, 21, ..., 33 в системе счисления с основанием 6.

Задание 13.

Укажите, сколько всего раз встречается цифра 1 в записи чисел 12, 13, 14, ..., 31 в системе счисления с основанием 5.

13

Задание 14.

Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 23 оканчивается на 1.

2, 11, 22

Задание 15.

Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 63 оканчивается на 23.

5, 30

Задание 16.

Десятичное число, переведенное в восьмеричную и в девятеричную систему, в обоих случаях заканчивается на цифру 0. Какое минимальное десятичное число удовлетворяет этому условию?

Задание 17.

В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 49 записывается в виде 100. Укажите это основание.

7

Задание 18.

Укажите наименьшее основание системы счисления, в которой запись числа 70 трехзначна.

5

Задание 19.

Укажите наименьшее основание системы счисления, в которой запись числа 50 двузначна.

8

Задание 20.

Решите уравнение $42_5 + x = 1122_3$.
Ответ запишите в четверичной системе счисления. Основание системы счисления указывать не нужно.

112

Задание 21.

Сколько единиц в двоичной записи числа $8^{1023} + 2^{1024} - 3$?

1024

Задание 22.

Сколько единиц в двоичной записи числа $4^{2016} + 2^{2018} - 6$?

2017

Задание 23.

Сколько единиц в двоичной записи числа $4^{2014} + 2^{2015} - 9$?

2015

Задание 24.

Сколько единиц в двоичной записи числа $4^{2015} + 2^{2015} - 15$?

2013

Задание 25.

Сколько единиц в двоичной записи числа $8^{2014} - 2^{614} + 45$?

5432

Задание 26.

Значение арифметического выражения:
 $9^8 + 3^5 - 2$ записали в системе счисления
с основанием 3. Сколько цифр «2» со-
держится в этой записи?

Задание 27.

Значение арифметического выражения:
 $2 \cdot 27^7 + 3^{10} - 9$ записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «0» содержится в этой записи?

Задание 28.

Значение арифметического выражения:
 $4 \cdot 125^4 - 25^4 + 9$ записали в системе
счисления с основанием **5**. Сколько цифр
«**4**» содержится в этой записи?

5

Задание 29.

Определите число N , для которого выполняется равенство $214_N = 165_{N+1}$

Задание 30.

Значение арифметического выражения:
 $3 \cdot (2^{10} + 2^7 + 2^4 + 2^1)$ записали в системе
счисления с основанием 2. Сколько
значащих нулей в этой записи?

Задание 31.

Значение арифметического выражения:
 $64^{115} + 8^{305} - 512$ записали в системе
счисления с основанием 8. Сколько цифр
«7» в этой записи?

227

ОТВЕТЫ

1. 7

2. 24

3. 11

4. 13

5. 1615

6. 6957

7. 231

8. 1210

9. 25

10. 24